COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 DÉCEMBRE 1888,

PRÉSIDÉE PAR M. DAUBRÉE.

MEMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** transmet une ampliation du Décret par lequel le Président de la République approuve l'élection, faite par l'Académie, de M. *Duclaux* pour remplir la place devenue vacante, dans la Section d'Économie rurale, par suite du décès de M. *Hervé Mangon*.

Il est donné lecture de ce Décret.

Sur l'invitation de M. le Président, M. **Duclaux** prend place parmi ses Confrères.

M. **G. Darboux** fait hommage à l'Académie du deuxième et dernier fascicule du Tome II de ses « Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal ».

M. Faye présente à l'Académie l'« Extrait de la Connaissance des Temps pour l'an 1890 », publié par le Bureau des Longitudes, à l'usage des Écoles d'Hydrographie et des marins du Commerce.

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète de Faye, faites à l'observatoire de Marseille (télescope Foucault de* $0^m,80$ *d'ouverture)*; par M. Stephan.

Dates 1888.	Heure de l'observation. Temps moyen de Marseille.	ΔÆ.	Δ℘.	Nombre de comp.	Æ appar.	Log. fact. parall.	℘ appar.	Log. fact. parall.	✶.
	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Déc. 5..	12.47.44	+2.15,93	−1. 4,0	10.10	8.12.23,90	$-\bar{1},407$	87.53.52,4	0,771	1
6..	12.56.34	+2. 8,53	+6.17,0	5.5	8.12.16,52	$-\bar{1},371$	88. 1.13,6	0,777	2
7..	12.56.45	−2.55,43	−7.25,7	5.5	8.12. 7,87	$-\bar{1},358$	88. 8. 9,4	0,773	3
8..	13.25.16	−3. 7,72	−0.19,4	10.10	8.11.55,60	$-\bar{1},238$	88.15.15,8	0,772	4

Positions des étoiles de comparaison.

✶.	Nom de l'étoile.	Grand.	Æ moy. 1888,0.	Réduction au jour.	Position moyenne 1888,0.	Réduction au jour.	Autorités.
			h m s	s	° ′ ″	″	
1	191 W_1 H. VIII......	8,8	8.10.5,18	+2,79	87.54.48,2	+8,2	Catalogue W_1.
2	191 W_1 H. VIII......	8,8	8.10.5,18	+2,81	87.54.48,2	+8,4	Catalogue W_1.
3	333 W_1 H. VIII......	9	8.15.0,48	+2,82	88.15.26,4	+8,7	$\frac{1}{3}$(2 Cat. Lamont + W_1).
4	333 W_1 H. VIII......	9	8.15.0,48	+2,84	88.15.26,4	+8,8	$\frac{1}{3}$(2 Cat. Lamont + W_1).

» Le 5, la comète est très faible, vaporeuse, irrégulièrement ovoïde, d'un diamètre de $0',50$ environ; on distingue excentriquement un petit point de 14e grandeur.

» Le 6, l'aspect est à peu près le même que la veille.

» Le 7, la comète paraît notablement plus belle que la veille, le noyau est moins faible; on distingue une trace de queue dirigée vers le nord-est du champ.

» Le 8, l'aspect est à peu près le même que la veille; cependant l'éclat paraît avoir encore augmenté. Noyau stellaire 11e-12e. »

CORRESPONDANCE.

M. le Secrétaire perpétuel signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, l'« Album de Statistique graphique de 1887 ». (Présenté par M. Léon Lalanne.)

GÉODÉSIE. — *Travaux géographiques au Brésil.* Note de M. **L. Cruls**, présentée par M. Faye, au nom de S. M. dom Pedro.

« L'observatoire impérial de Rio de Janeiro a été chargé de déterminer les positions géographiques d'un certain nombre de stations du chemin de fer Dom Pedro II, entre la capitale de l'empire et Sabara. Je puis indiquer déjà les résultats obtenus pour les deux premières stations : Rodeio et Entre-Rios.

» Les instruments employés sont deux cercles méridiens portatifs, modèle n° 2, de Brunner. Les longitudes ont été obtenues à l'aide d'échanges de signaux électriques, effectués dans chacune des quatre nuits d'observations complètes dont se compose chaque détermination, les instruments étant retournés après la deuxième nuit d'observation.

Stations.	Latitude.	Erreur probable.	Longitude (1).	Erreur probable.
Rodeio.....	22°33′ 7″,8 S.	±0″,45	1m58s,85 W.	±0s,03
Entre-Rios..	22° 6′49″,2 S.	±0″,31	0m 9s,27 W.	±0s,07

» Les réductions ont été effectuées par M. L. da Rocha Miranda, et les observations par MM. Lacaille et Morize. »

ANALYSE. — *Sur l'application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation.* Note de M. **F. Caspary**, présentée par M. Hermite (2).

« Pour obtenir les formules relatives au problème de la rotation d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe, je pose

$$w = -\frac{\pi}{2K}(ia + ib + K), \qquad x = z = \frac{\pi}{2K}(u - iK'),$$

$$y = -\frac{\pi}{2K}(ia - ib + K); \qquad f(u) = e^{\frac{\pi(K' + 2iu)}{4K}}.$$

(1) Par rapport à l'observatoire impérial.

(2) *Voir* même Volume, p. 859 et 901.

» Alors on tire des expressions (5), (6), (7) de ma Note précédente les valeurs

$$(6)\quad \begin{cases} \gamma_{11} = A_1 B_1 f(u - ia)\,H(ib)\,\Theta_1(u - ia), & \gamma_{21} = -\,iA_2 B_1 f(u + ib)\,H_1(ia)\,\Theta(u + ib), \\ \gamma_{12} = iA_1 B_2 f(u - ib)\,H_1(ia)\,\Theta(u - ib), & \gamma_{22} = A_2 B_2 f(u + ia)\,H(ib)\,\Theta_1(u + ia), \\ \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{S} = -\,A_1 A_2 B_1 B_2 f^2(u)\,H_1(ia + ib)\,H_1(ia - ib)\,\Theta^2(u),} \end{cases}$$

qui peuvent être mises, ρ étant une fonction quelconque, sous la forme plus simple :

$$(7)\quad \begin{cases} \gamma_{11} = \rho H(ib)\,\Theta_1(u - ia) = i\rho P, & \gamma_{21} = -\,i\rho H_1(ia)\,\Theta(u + ib) = -\,i\rho Q \\ \gamma_{12} = i\rho H_1(ia)\,\Theta(u - ib) = i\rho Q', & \gamma_{22} = \rho H(ib)\,\Theta_1(u + ia) = i\rho P' \\ \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{S} = -\,\rho^2 H_1(ia + ib)\,H_1(ia - ib)\,\Theta^2(u) = -\,\rho^2 N.} \end{cases}$$

» En substituant ces valeurs dans les expressions (1) de ma Note citée :

$$\begin{array}{lll} 2\mathfrak{S}c_{11} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2, & 2i\mathfrak{S}c_{12} = \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 - \gamma_{22}^2, & i\mathfrak{S}c_{13} = \gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{21}\gamma_{22}, \\ 2i\mathfrak{S}c_{21} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 - \gamma_{22}^2, & 2\mathfrak{S}c_{22} = -\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 - \gamma_{22}^2, & \mathfrak{S}c_{23} = -\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{21}\gamma_{22}, \\ i\mathfrak{S}c_{31} = \gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}, & \mathfrak{S}c_{32} = -\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}, & \mathfrak{S}c_{33} = -\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}, \end{array}$$

on a exactement les formules de Jacobi (*Œuvres complètes*, t. II, p. 505) et, par une transformation simple, aussi celles de M. Lottner (*Journal de Crelle*, t. 150, p. 113). D'après le théorème établi dans ma Note précédente, on a de plus

$$c_{mn} = a_{m1} b_{n1} + a_{m2} b_{n2} + a_{m3} b_{n3} \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

où les coefficients a_{mn} et b_{mn} proviennent des formules (3), si l'on fait $\Omega = -1$ et si l'on égale successivement ω à $ia + ib$ et à $ia - ib$. (Voir Jacobi, *loc. cit.*, p. 507-510.)

» Les expressions des coefficients c_{13}, c_{23}, c_{33} méritent un intérêt particulier. Si on les forme au moyen des valeurs (6), on obtient, sauf la notation, les formules de M. Dumas, relatives au pendule conique (*Journal de Crelle*, t. 50, p. 67). Par une transformation légère, ces formules prennent la forme élégante que l'on doit à M. Hermite (*loc. cit.*, p. 112).

» Dans un Mémoire prochain, je communiquerai les détails de ces calculs, les expressions des angles d'Euler au moyen des fonctions thêta et d'autres résultats. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une proposition générale concernant les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.* Note de M. **Emile Picard**, présentée par M. Hermite.

« Un des points les plus intéressants de la théorie de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est la détermination d'une intégrale supposée continue à l'intérieur d'un contour, au moyen de ses valeurs le long de ce contour. Ce problème est susceptible de s'étendre, sous certaines conditions, à ces équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, qui peuvent être obtenues en égalant à zéro la variation première d'une intégrale double, et dont je me suis occupé précédemment (*Comptes rendus*, 3 septembre 1888). On démontre d'ailleurs aisément que ces équations peuvent se ramener au type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)\, u = 0.$$

» Je veux aujourd'hui indiquer les résultats auxquels je suis arrivé, en me posant le même problème pour une équation linéaire quelconque

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

les coefficients étant des fonctions continues de x et y dans les portions du plan que nous considérons.

» Soit (x_0, y_0) un système de valeurs de x et y, pour lequel

$$b^2 - ac < 0,$$

c'est-à-dire pour lequel les caractéristiques sont imaginaires. Je démontre d'abord que, si l'on trace dans un *certain* domaine autour de ce point une courbe fermée C, *il ne pourra exister deux intégrales uniformes et continues dans l'aire limitée par* C, *et prenant sur cette courbe les mêmes valeurs*. Pour le voir, considérons l'intégrale double, nécessairement nulle,

$$\int\!\!\int u \mathrm{E}\, dx\, dy,$$

en désignant par E le premier membre de (1) et en appelant u une intégrale s'annulant le long de C; l'intégrale double est étendue à l'aire que limite C. On transformera de suite cette intégrale en une autre de la forme

$$(2) \qquad \iint \mathrm{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

F désignant une forme quadratique en u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, les coefficients dépendant de x et y. En général, cette forme ne sera pas définie pour x_0 et y_0, et l'on ne peut pas conclure de là que u est identiquement nulle; mais soient B et B′ des fonctions continues quelconques de x et y, on aura ici

$$(3) \qquad \iint \left[\frac{\partial(\mathrm{B}u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathrm{B}'u^2)}{\partial y}\right] dx\, dy = 0.$$

» La somme des intégrales (2) et (3) sera donc nulle, et de même forme que (2), et il ne reste plus qu'à faire voir qu'on peut déterminer les fonctions B et B′, de manière que l'on ait sous le signe d'intégration une forme définie. On est ramené pour cela à un problème du genre suivant : étant donnée une fonction θ de x et y, déterminer autour de (x_0, y_0) une région du plan, où l'on puisse trouver deux fonctions *continues* B et B′, telles que

$$\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}'^2 + \theta(x, y) < \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}.$$

» On voit, par ce détour, comment on pourra déterminer un certain domaine autour de (x_0, y_0) répondant à l'énoncé.

» La question inverse se présente maintenant à nous; c'est le problème réellement intéressant. J'établis qu'on pourra trouver autour de (x_0, y_0) un certain domaine tel qu'une intégrale de l'équation sera effectivement déterminée par ses valeurs le long d'une courbe fermée C appartenant à ce domaine. J'indique la marche de la démonstration, qui est assez délicate. Tout d'abord, nous ne diminuons pas la généralité, en supposant que l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

» Considérons alors une courbe C que, pour éviter certaines difficultés de détail, nous supposerons analytique, et donnons-nous sur cette courbe une succession de valeurs que nous supposons fonction continue du para-

mètre définissant la position d'un point sur C; nous admettons de plus que cette fonction admette des dérivées des trois premiers ordres. Il existera une fonction u_0 satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et prenant sur C les valeurs données. Cette fonction obtenue, nous formons une fonction u_1 satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 = 0$$

et s'annulant le long de C; elle est complètement déterminée. Nous formons ensuite une fonction u_2 satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 = 0$$

et s'annulant le long de C. Nous continuons ainsi indéfiniment. Formons alors la série

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

» Si le contour C est dans un domaine convenable autour du point (x_0, y_0), *la série u est convergente et donne la solution du problème proposé.*

» Le mode de développement qui précède, et qui vient d'être mis à profit pour l'étude de l'équation linéaire générale, avait déjà été utilisé par M. Schwarz dans un cas particulier, celui de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0,$$

comme on peut le voir dans un Mémoire extrêmement remarquable sur l'équation précédente, inséré dans les *Actes de la Société finlandaise des Sciences* (1888). »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les caractères de convergence et de divergence des séries à termes positifs.* Note de M. **P. du Bois-Reymond**, présentée par M. Hermite. (Extrait.)

« M. J.-L.-W.-V. Jensen, en publiant ses deux Notes : *Sur un théorème général de convergence* (*Comptes rendus,* t. CVI, nos 11 et 22), paraît ne pas

avoir eu connaissance de mon Mémoire : *Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern* (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. 76, p. 61).

» En appelant $\psi(p)$ une fonction définie par l'équation

$$u_p = \frac{1}{\lambda_p}[\psi(p) - \psi(p+1)],$$

λ_p étant censée ne devenir ni nulle ni infinie, $\psi(p)$ peut être considérée comme ayant une limite nulle ou infinie, selon que la série Σu_p est convergente ou divergente.

» La théorie nécessite encore l'introduction d'une fonction $\varphi(p)$ intermédiaire entre u_p et $\psi(p)$, qui satisfait à l'équation

$$\psi(p) = u_p \varphi(p).$$

Entre ces quantités ont lieu les deux théorèmes que voici :

» I. *Soient* $\varphi(p)$ *et* u_p *des quantités positives. Si, en premier lieu,*

$$\lim\left[\varphi(p) - \varphi(p+1)\frac{u_{p+1}}{u_p}\right] = \lim \lambda_p$$

est positive, la série Σu_p *est convergente. Soit, en second lieu,* $\varphi(p)$ *choisie de manière qu'une série* Σu_p *ne puisse converger, à moins qu'on n'ait* $\lim \varphi(p) u_p = 0$, *la série* Σu_p *sera divergente toutes les fois que* $\lim\left[\varphi(p) - \varphi(p+1)\frac{u_{p+1}}{u_p}\right]$ *sera négative, et alors* $\lim \varphi(p) u_p$ *sera infinie.*

» II. *En éliminant* u_p *entre les équations*

$$\psi(p) = u_p \varphi(p), \qquad u_p = \frac{1}{\lambda_p}[\psi(p) - \psi(p+1)],$$

on trouve facilement

$$\psi(p+1) = \psi(1) . e^{-\sum_1^p \frac{v_p \lambda_p}{\varphi(p)}},$$

$\lim v_p$ *étant* $= 1$.

» Au moyen de ces deux théorèmes, qui me servent de point de départ dans ma théorie, on déduit aisément les critères possibles avec le caractère de nécessité absolue. Par exemple, on voit bien au premier coup d'œil que les conditions pour $\varphi(p)$ du théorème I sont remplies, si $\sum \frac{1}{\varphi(p)}$ est une série divergente, mais ce n'est qu'au moyen du théorème II qu'on démontre

la *necessité* de remplacer ces conditions par celle de la divergence de la série $\sum \frac{1}{\varphi(p)}$. Comme je l'expose dans mon Mémoire, le théorème I tient complètement lieu des critères généraux que M. Kummer a communiqués dans le Tome XIII du *Journal de Crelle,* mais en réduisant essentiellement les épreuves qu'ils imposent, et surtout en simplifiant son critère de divergence, de manière à le rendre symétrique à celui de convergence.

» Le théorème général de M. Jensen (*Comptes rendus,* t. CVI, n°s 11 et 22) :

» *La série à termes positifs* Σu_p *sera* $\left\{\begin{matrix}\textit{convergente}\\ \textit{divergente}\end{matrix}\right\}$ *si, à partir d'une certaine valeur de* n,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \left\{\begin{matrix} > \mu \\ < 0 \end{matrix}\right\},$$

a_n *et* μ *étant positifs, et la série* $\sum \frac{1}{a_n}$ *divergente,*

rentre complètement dans mon théorème I, quant à la convergence. Mais sa partie relative à la divergence est plus générale que la partie correspondante du mien, ce qui demande une explication. Pour élucider cette différence entre nos critères, il suffit de se borner au cas où, dans mon critère

$$\lim\left[\varphi(p) - \varphi(p+1)\frac{u_{p+1}}{u_p}\right] \gtrless 0,$$

$\varphi(p)$ est $= 1$, c'est-à-dire au cas

$$\lim\left(1 - \frac{u_{p+1}}{u_p}\right) \gtrless 0.$$

» Il est évident que la série est divergente quand la quantité $1 - \frac{u_{p+1}}{u_p}$ est négative. Au lieu des précédents on a donc, en effet, les deux critères de forme différente :

$$\lim\left(1 - \frac{u_{p+1}}{u_p}\right) > 0 \text{ pour la convergence,}$$

$$1 - \frac{u_{p+1}}{u_p} < 0 \text{ pour la divergence.}$$

» Pour la convergence, $1 - \frac{u_{p+1}}{u_p} > 0$ serait insuffisant, comme on le reconnaît en faisant $u_p = \frac{1}{p}$. La symétrie, qui règne dans toute la théorie

par rapport à la convergence et à la divergence, *quand on s'en tient aux limites,* se trouve donc en défaut, quand on soumet les expressions à l'épreuve *avant* la limite.

» Mais la forme que M. Jensen donne à son critère de divergence évoque une question intéressante.

» La question dont je veux parler est de savoir s'il existe une fonction $\lambda_p^{(1)}$ telle que, pour $1 - \frac{u_{p+1}}{u_p} > \lambda_p^{(1)}$, la série Σu_p soit toujours convergente. *Or, je démontre qu'une telle fonction* $\lambda_p^{(1)}$ *n'existe pas.*

» Si, comme l'a fait M. Weierstrass dans son Mémoire : *Ueber die Theorie der analytischen Facultaten* (*Journal de Crelle*, t. 51), on se borne aux séries pour lesquelles le rapport $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ peut se mettre sous la forme

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p^2} + \cdots,$$

et qu'on fasse $\alpha_0 = 1$, on aura

$$\lambda_p = -\frac{\alpha_1}{p} - \cdots$$

d'où

$$p\left(1 - \frac{u_{p+1}}{u_p}\right) = -\alpha_1 - p\ldots,$$

et, d'après le critère de Raabe, la série sera convergente ou divergente selon que $-\alpha_1 \gtrless 1$. Ainsi, pour les séries qui satisfont à l'hypothèse de M. Weierstrass, la fonction $\lambda_p^{(1)}$ est $\frac{1}{p}$, et l'on a

$$1 - \frac{u_{p+1}}{u_p} \gtrless \frac{1}{p}$$

pour la convergence et pour la divergence. Ceci met en évidence la nature des deux formes de critères. Le critère de premier abord $\lim\left(1 - \frac{u_{p+1}}{u_p}\right) \gtrless 1$ se transforme par l'introduction de la fonction $\lambda_p^{(1)}$ dans le critère du second rang, celui de Raabe. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la rectification des cubiques planes unicursales.* Note de M. L. RAFFY, présentée par M. Hermite. (Extrait.)

« I. L'arc d'une courbe unicursale s'exprime, en fonction du paramètre t qui correspond uniformément aux points de la courbe, par une intégrale

hyperelliptique dont le genre peut être appelé *le genre de l'arc*. Ce nombre dépend de quatre sortes de singularités dont voici la nature et l'effet :

» *Si un point situé à distance finie est l'origine d'un cycle à tangente isotrope, le cycle étant d'ordre n et de classe ν, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $\nu : 2$.*

» *Si un point situé à distance finie est l'origine d'un cycle à tangente non isotrope, le cycle étant d'ordre n, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.*

» *Si la courbe admet une direction asymptotique non isotrope, et si au point situé à l'infini dans cette direction correspondent n valeurs égales du paramètre t, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.*

» *Si l'un des points cycliques est l'origine d'un cycle d'ordre n et de classe ν, le genre de l'arc est diminué de n plus la partie entière de $(\nu - 1) : 2$.*

» II. De ces théorèmes généraux résulte la détermination de toutes les cubiques unicursales dont l'arc est de genre inférieur à 3.

» *Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 2 sont celles qui présentent un rebroussement à distance finie et celles qui touchent la droite de l'infini ou admettent une asymptote double.*

» *Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 1 (intégrale elliptique) sont celles qui présentent une des quatre singularités suivantes, à l'exclusion des trois autres : 1° deux points d'inflexion à tangente isotrope, situés à distance finie ; 2° rebroussement à distance finie et contact avec la droite de l'infini ; 3° inflexion parabolique ou rebroussement parabolique à l'infini ; 4° passage par les points cycliques.*

» *Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre zéro sont : 1° les courbes que représente en coordonnées rectangulaires l'équation*

$$(x + l)y^2 - 27lx^2 = 0;$$

2° les paraboles semi-cubiques, obliques ou droites ; 3° les cissoïdes, obliques ou droites ; 4° les courbes dont l'équation est

$$(y + l)y^2 - 3lx^2 = 0. \tag{1}$$

» Ces dernières sont les lignes de courbure de la surface minima de M. Enneper. Elles sont connues aussi comme podaires négatives d'une parabole par rapport à son foyer, et comme caustiques par réflexion d'une parabole pour des rayons incidents perpendiculaires à son axe. Leur arc est une fonction rationnelle des coordonnées x, y. Mais il y a plus. *Les*

courbes (1) *sont les seules cubiques unicursales dont la courbure soit une fonction rationnelle des coordonnées x, y.*

» III. On peut se proposer de trouver toutes les cubiques unicursales dont l'arc est une fonction algébrique de t. Toutes ces courbes ont leur arc de genre zéro. Il suit de là que *les seules cubiques unicursales dont l'arc soit algébrique sont les courbes* (1) *et les développées de paraboles du second degré* [1]. »

MÉCANIQUE. — *Sur l'extension à certains points de l'une des propriétés mécaniques du centre de gravité.* Note de M. **A. de Saint-Germain.** (Extrait.)

« L'auteur se demande quels sont les points d'un solide qui partagent avec le centre de gravité la propriété suivante : le moment de la quantité de mouvement du corps S par rapport à une droite fixe OZ doit, à un instant donné, être égal au moment de la quantité de mouvement d'une masse M concentrée en A, augmenté du moment de la quantité de mouvement du solide par rapport à une droite AZ′ parallèle à OZ, quand on considère le mouvement relatif à des axes de direction constante qui se coupent en A.

» Le lieu est un hyperboloïde.

» Le problème est analogue, l'auteur le fait remarquer, à la question résolue par M. Gilbert dans sa Note insérée aux *Comptes rendus* de la séance du 23 novembre 1885. »

CINÉMATIQUE. — *Sur les accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps solide qui a un point fixe* O. Note de M. **Ph. Gilbert** [2], présentée par M. Resal.

« 1. Appelons a l'axe instantané de rotation du corps; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses accélérations angulaires des divers ordres; ρ le rayon vecteur; v la vitesse; $j_1, j_2, \ldots, j_n$ les accélérations du premier, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre d'un point

(1) Les résultats de cette Note font l'objet d'un Mémoire qui sera publié prochainement dans les *Annales de l'École Normale.*

(2) *Voir*, pour les notations, *Comptes rendus,* t. CIII, p. 1248; t. CIV, p. 162; t. CVII, p. 726.

quelconque M_0 du corps. L'astérisque $\star$ marquant toujours un produit géométrique, on a la relation

$$(1) \quad \omega \star j_n + n\lambda_1 \star j_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda_2 \star j_{n-2} + \ldots + n\lambda_{n-1} \star j_1 + \lambda_n \star v = 0.$$

» Pour $n = 1$, cette équation se réduit à celle-ci

$$\omega \star j_1 + \lambda_1 \star v = 0,$$

que nous avons donnée (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 162).

» 2. On a cette autre relation

$$(2) \qquad \rho \star j_n + (n+1) v \star j_{n-1} + \frac{(n+1)n}{1.2} j_1 \star j_{n-2} + \ldots = 0,$$

la suite s'arrêtant au terme après lequel les mêmes indices reparaîtraient.

» En posant $n = 2$, on arrive à cette relation remarquable

$$(3) \qquad \Sigma \rho \star m j_2 = -3\omega \star G,$$

qui peut s'énoncer ainsi, en appelant *force d'inertie du second ordre* d'un point le produit de sa masse par sa suraccélération prise en sens contraire :

» *La somme des produits géométriques des rayons vecteurs de tous les points du corps par leurs forces d'inertie du second ordre vaut trois fois le produit géométrique de l'axe instantané par l'axe du couple moteur.*

» 3. Ces formules sont des cas particuliers d'autres relations très générales. En se bornant au cas simple d'un seul point *libre*, on établit facilement la relation

$$(4) \quad \frac{1}{2}\frac{d^n j_p^2}{dt^n} = j_p \star j_{n+p} + n j_{p+1} \star j_{n+p-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} j_{p+2} \star j_{n+p-2} + \ldots;$$

on prendra $\frac{n}{2} + 1$ termes si n est pair; $\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Dans cette formule, si l'on pose

$$p = -1, \qquad j_{-1} = \rho, \qquad j_0 = v, \qquad n = 2,$$

on trouve l'égalité

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2\rho^2}{dt^2} = \rho \star j + v^2,$$

et ce cas très particulier renferme le théorème de Villarceau ([1]). »

([1]) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 253.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur l'emploi de l'eau oxygénée pour le dosage des métaux de la famille du fer : 1° Chrome.* Note de M. **Adolphe Carnot**, présentée par M. Friedel.

« L'eau oxygénée détermine, sur les solutions de divers métaux de la famille du fer, des réactions tantôt oxydantes, tantôt réductives, qui peuvent être mises à profit dans l'analyse chimique. Je m'occuperai successivement du chrome, du manganèse, du fer, du cobalt et du nickel.

» 1° *Chrome.* — L'acide chromique fournit avec l'eau oxygénée une réaction très remarquable, à laquelle est demeuré attaché le nom de Barreswil, consistant dans la coloration bleue qui se produit dès que l'on mélange les solutions étendues et froides des deux substances. Cette réaction est caractéristique pour l'eau oxygénée; elle l'est également pour les chromates, à la condition d'y ajouter un très léger excès d'un acide fort, pour mettre l'acide chromique en liberté.

» Cette coloration est assez fugitive; elle dure quelques minutes à peine, si la solution est presque neutre; elle disparaît au bout de quelques secondes, si elle renferme plus de $\frac{1}{100}$ d'acide chlorhydrique ou sulfurique libre. Barreswil l'avait attribuée à la formation d'un acide perchromique instable; M. Moissan a montré qu'elle est due à une combinaison d'acide chromique et d'eau oxygénée (CrO^3, HO^2).

» J'ai reconnu que, lorsque l'eau oxygénée a épuisé son action, l'acide chromique se trouve entièrement réduit à l'état de sesquioxyde de chrome, tandis qu'une quantité correspondante d'eau oxygénée a été détruite.

» Cette réaction peut, en conséquence, fournir un moyen de dosage volumétrique soit pour l'eau oxygénée, soit pour l'acide chromique.

» En versant peu à peu une liqueur titrée de bichromate de potasse dans une solution étendue d'eau oxygénée, légèrement acidifiée par l'acide chlorhydrique ou sulfurique, on voit se produire, à chaque addition nouvelle, une teinte bleue qui disparaît en quelques secondes par agitation. On peut ainsi déterminer le titre d'une solution d'eau oxygénée au moyen du bichromate, comme on le fait en solution sulfurique à l'aide du permanganate de potasse. Mais le permanganate est préférable, à cause de la netteté plus grande et de la persistance de la coloration qu'il produit.

» Le dosage de l'acide chromique par l'eau oxygénée se fait, au con-

traire, dans des conditions avantageuses ; car il est exact, facile à exécuter, et il n'exige l'introduction d'aucun élément fixe, qui puisse entraver les opérations suivantes, s'il s'agit d'une analyse complète.

» Les conditions que j'ai trouvées les plus favorables sont les suivantes :

» La solution de chromate à examiner est placée dans un verre à fond plat ou dans une fiole ; on l'étend d'eau, s'il y a lieu, jusqu'à 50^{cc} au moins et on la neutralise soit par l'ammoniaque, soit par l'acide sulfurique ou chlorhydrique, en lui laissant une très légère acidité.

» On prend pour réactif de l'eau oxygénée très étendue, par exemple l'eau oxygénée du commerce étendue de 5, 10 ou 20 volumes d'eau pure. Elle présente, dans ces conditions, une très grande stabilité à la température ordinaire. On la verse d'une burette graduée, toute en verre, dans le vase où est la solution, qu'on tient à la main au-dessus d'un papier blanc.

» Les premières gouttes produisent dans le liquide jaune une série de taches de teinte sombre, qui disparaissent bientôt ; plus tard, le liquide prend une coloration bleue, qui disparaît également, si l'on fait tournoyer le vase. Il prend enfin une teinte verte, plus ou moins intense, suivant la proportion de chrome. On s'arrête aussitôt que la dernière goutte a cessé de produire une tache bleue et l'on note le volume d'eau oxygénée employé à ce moment.

» On opère de la même façon en partant d'un volume mesuré de bichromate de potasse pur, en dissolution titrée, et la comparaison des volumes permet de calculer facilement la teneur en acide chromique de la première solution. Pour que les phénomènes de coloration soient tout à fait comparables dans les deux expériences, il est bon que les volumes de liquides et les quantités d'acide chromique ne soient pas trop différents, ce qu'on réalise facilement en se guidant sur la coloration du bichromate.

» Il convient d'éviter que la coloration finale soit trop foncée et empêche de bien apercevoir la coloration bleue passagère ; pour cela, il ne faut pas dépasser la proportion de $0^{gr},2$ à $0^{gr},3$ d'acide chromique.

» La solution titrée du bichromate de potasse, qui sert de comparaison, est facile à préparer et se conserve sans aucune altération dans un vase bien bouché. L'eau oxygénée très étendue est, de son côté, suffisamment stable pour servir à une série nombreuse des dosages, sans qu'il y ait à craindre aucun changement de titre pendant la durée de ces opérations. »

BOTANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur un latex du* Bassia latifolia *Roxb.* Note par MM. **Edouard Heckel** et **Fr. Schlagdenhauffen**, présentée par M. A. Chatin.

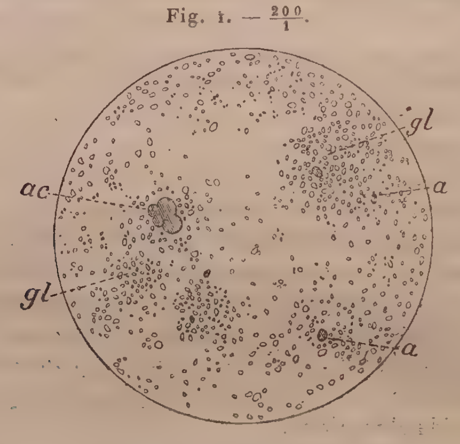
« Le *Bassia latifolia* ou *Mohwa* est un grand arbre de la famille des Sapotées ; il est bien connu par ses fleurs (calice) succulentes dont on exploite le

sucre, par ses graines grasses qui donnent le beurre d'Illipé, et par son fruit agréable. Ce que l'on sait moins bien, c'est que ce végétal, originaire de l'Asie tropicale et répandu abondamment dans les Indes anglaises, donne par incision, mais en faible quantité et assez difficilement, un latex capable de fournir de la gutta-percha.

» Ce dernier liquide est blanc laiteux, visqueux au toucher et tel qu'il nous est parvenu de Bombay, de Calcutta et de la Réunion (après un mois environ d'extraction et contenu dans des vases hermétiquement bouchés); il possède une odeur légèrement butyreuse et franchement acide.

» Sa densité est de 1,018. Examiné au microscope ($\frac{200}{1}$), ce latex se présente sous l'aspect suivant. On voit, mêlés à de grosses masses de globules propres à tous les latex, mais de très minimes dimensions (*fig.* 1, *gl*), des

Fig. 1. — $\frac{200}{1}$.



Latex frais de Bassia latifolia *Roxb.*

a, amidon simple.
ac, amidon composé.
gl, globules du latex.

grains d'amidon simples *a*, très développés, et d'autres d'amidon composé *ac* assez volumineux, les uns et les autres à hile très visible etponctiforme. Ce fait est assez intéressant, car il me semble établir, pour la première fois, la constatation de la présence de la fécule dans le latex des Sapotacées; on en connaissait d'ailleurs l'existence dans d'autres latex et notamment dans celui des Euphorbiacées.

» Filtré, ce suc passe trouble et le liquide qui a traversé le filtre renferme de nombreux globules. Soumis à l'évaporation au bain-marie, il brunit et fournit une masse poisseuse qui se laisse étirer en fils. Sur 10^{gr} employés, nous trouvons que la perte à l'étuve à 105° est de $8^{gr},77$. Ce qui

reste, c'est-à-dire $1^{gr},23$, contient, après incinération, $0^{gr},41$ de sels fixes. On peut donc en établir la composition de la manière suivante :

Eau	87,70	100
Matières organiques	8,20	
Sels fixes	4,10	

» Quand on le chauffe au bain de sable, dans une cornue, on recueille un liquide acide. Ce dernier, dosé alcalimétriquement, exige 5^{cc} d'une solution de soude normale pour 100^{cc} de suc employé. Évaporé au bain-marie d'abord, puis à l'étuve, le produit distillé, préalablement saturé, fournit un résidu qui, repris par l'eau, jouit des propriétés suivantes :

» 1° Il réduit légèrement l'azotate d'argent à chaud.

» 2° Il colore en rouge le chlorure ferrique.

» 3° Il dégage une odeur acétique quand on le traite par l'acide sulfurique.

» 4° Il donne de l'éther acétique au contact de l'acide sulfurique et de l'alcool.

» 5° Le résidu sec, chauffé avec de l'acide arsénieux, dégage l'odeur du cacodyle.

» Il résulte donc de l'ensemble de ces caractères que le produit distillé contient des traces d'acide formique, principalement de l'acide acétique et point d'acide butyrique : on aurait pu croire à la présence de ce dernier acide en se basant sur l'odeur particulière que dégage le suc naturel.

» En calculant son acidité d'après la quantité de solution alcaline nécessaire pour le saturer, on reconnaît qu'elle équivaut à $0^{gr},30$ d'acide acétique par 100^{cc} de liquide distillé.

» Si, avant de réduire le suc laiteux à siccité, on remue avec un agitateur la bouillie liquide provenant de 100^{cc} de matière, au moment où elle commence à se tasser, on amasse autour de la baguette une substance poisseuse, très adhésive, et l'on trouve en même temps au fond du vase une matière pulvérulente dont le poids est 1,666. En filtrant et évaporant la solution brune, on obtient un résidu de 0,172. Ce dernier, calciné avec du sodium, ne fournit pas de bleu de Prusse et ne contient par conséquent pas de matières albuminoïdes.

» La solution aqueuse précipite par le sous-acétate de plomb, par le chlorure ferrique en vert, ce qui indique la présence de la gomme et des traces de tannin. Elle ne présente rien de particulier au spectroscope.

» La poudre brune est insoluble dans l'eau, dans l'alcool et l'acétone;

mais soluble en partie dans l'éther de pétrole, qui dissout $\frac{1}{5}$ de son poids d'une résine amorphe, incolore et transparente.

» Après incinération, le produit brun insoluble laisse 0,261 de cendres blanches riches en sulfate de chaux. L'extrait aqueux fournit également 0,047 des mêmes cendres.

» En retranchant de la somme des cendres $4^{gr},10$, et de la matière organique 8,20, c'est-à-dire 12,30, le poids total de la matière brune insoluble 1,666, et du résidu aqueux 0,172, c'est-à-dire 1,838, on a 10,462. D'un autre côté, en prenant la différence entre le poids total des cendres 4,10 et celui des mêmes cendres contenues dans le produit brun et dans l'extrait aqueux, c'est-à-dire 0,308, on arrive à 3,792. Retranchant maintenant le deuxième nombre du premier, nous aurons

$$10,462 - 3,792 = 6,670$$

pour poids de la matière adhésive signalée plus haut. C'est cette matière qui présente le plus d'intérêt, car elle fournit la gutta-percha.

» Elle se dissout dans l'alcool et dans l'acétone; grâce à l'emploi de ces véhicules, nous obtenons :

			Pour 100.
1° Partie soluble dans l'alcool	2,043	soit	30,631
2° » dans l'acétone	2,824		42,342
3° Gutta-percha	1,803		27,027
	6,670		100,000

» Ces nombres, ainsi que les précédents, nous permettent donc d'établir la composition en centièmes du suc laiteux comme suit :

Eau		87,40
Acide formique (traces) et acide acétique		0,50
Partie insoluble dans l'eau 1,666	matières organ. indét.	1,405
	cendres	0,261
Partie soluble dans l'eau 0,172	tannin et gomme	0,125
	cendres	0,047
Partie soluble dans l'alcool — résine α		2,043
Partie soluble dans l'acétone — résine β		2,824
Gutta-percha		1,803
Cendres		3,792
		100,000

» Ce qu'il importe surtout de retenir de cette étude, c'est que le suc épaissi, évaporé au quart environ de son volume primitif, fournit après

agitation une masse adhésive dans la proportion de 6,67 pour 100. Elle se dissout en partie dans l'alcool et dans l'acétone, et laisse, à l'état insoluble, 27,027 pour 100 de son poids d'une gutta dont nous ferons connaître ultérieurement la composition intime et les propriétés industrielles. »

ZOOLOGIE. — *Sur quelques Infusoires nouveaux ou peu connus.* Note de M. J. **Kunstler**, présentée par M. A. Milne-Edwards.

« La partie terminale de l'intestin de la Limule est l'habitat d'un Infusoire parasite d'environ 60^{μ} de longueur. D'une forme ovoïde, avec une bouche sub-terminale, il présente un bouquet de longs cils, assez peu abondants, insérés sur le pourtour de la bouche et rappelle ainsi le *Lophomonas blattarum*. Chez ce dernier, contrairement à toutes les descriptions actuelles, les cils buccaux ne constituent pas un faisceau homogène; ils sont insérés sur un bourrelet entourant la bouche et disposés en deux faisceaux latéraux, dans chacun desquels ils affectent une disposition un peu spiralée (1). Chez le parasite de la Limule, la disposition ciliaire n'est pas analogue. De la bouche part un tube œsophagien rigide s'enfonçant obliquement dans le parenchyme et se terminant brusquement vers le milieu du corps; il présente deux lames, d'aspect corné, ayant la forme d'une faux allongée, opposées l'une à l'autre et proéminant dans la cavité du tube; l'une est insérée suivant la ligne médiane dorsale, l'autre suivant la ligne médiane ventrale. Le corps de cet organisme est entouré d'une cuticule présentant un double système de stries superficielles qui se coupent obliquement, et à structure aréolaire; elle recouvre le parenchyme du corps; celui-ci présente, en apparence du moins, et traité par certains réactifs, une structure analogue, fine vers la périphérie, plus grossière à l'intérieur. Vers l'extrémité postérieure du corps se trouvent la vésicule contractile et le noyau, la première du côté dorsal, la dernière près de la face ventrale. Le noyau s'est présenté à moi, dans certains cas, avec un aspect allongé et étranglé au milieu, en forme de biscuit à la cuiller, comme s'il était en voie de division. Vers l'extrémité du corps, rejetée vers la face dorsale, se voit une petite dépression tégumentaire, à terminaison interne douteuse (anus?).

---

(1) L'amibe de la Blatte se multiplie par des kystes.

» Dans l'intestin d'une larve de Tipulide, dont la déterminaison exacte n'a pas pu être faite, se trouvent de petits êtres peu abondants, dont l'étude présente de grandes difficultés. Ce sont des Flagellés voisins des *Bodo*, mais à bouche terminale : aucun des deux filaments n'est dirigé en arrière.

» L'un de ces êtres, globuleux, piriforme, de 8^{μ} à 10^{μ} de longueur, a l'extrémité antérieure arrondie, tandis que la postérieure est pointue; il est rempli de granulations et présente des flagellums antérieurs remarquables par leur longueur, qui s'insèrent au fond d'un petit infundibulum; du fond de celui-ci part un tube œsophagien court et fin, bientôt masqué par un gros noyau, situé près de l'extrémité antérieure du corps.

» L'autre espèce a le corps allongé, tordu, et ses mouvements se font en spirale, à la manière d'une vrille. Court tube œsophagien. Petite pointe caudale.

» L'hydrophile est l'hôte d'une sorte de petit *Monocercomonas*, petit organisme atteignant à peine une dizaine de μ de dimension; il est aussi difficile à voir et à observer, car il est peu abondant et toujours en mouvement; il s'insinue constamment au milieu des matières qui remplissent l'intestin.

» La forme du corps, allongée, peut être considérée comme symétrique par rapport à l'axe longitudinal; cependant elle est variable et ne peut donc pas être bien définie. Les changements de forme qui s'observent sont de deux sortes principales; les uns n'altèrent pas la configuration générale du corps, tandis que les autres sont dus à de véritables mouvements amiboïdes, localisés à la région postérieure du corps.

» A l'extrémité antérieure du corps se voient quatre flagellums égaux, un peu plus longs que le corps; l'extrémité postérieure, ordinairement élargie, est obtuse et non terminée en pointe, comme chez les Monocercomonades. Trois de ces filaments sont accolés entre eux à la base et se séparent à des hauteurs variables. Ce caractère les rapprocherait des Phyllomètres, si la base de ces cils était plus grosse. Le quatrième flagellum ne paraît pas soudé au faisceau, et, dans certains cas, je l'ai vu dirigé en arrière. Les mouvements de ces êtres sont saccadés, vifs, quoique le déplacement du corps, qui résulte de ces tremblements, soit assez lent.

» La configuration du corps est assez variable, et d'un moment à l'autre l'aspect des individus change dans certaines limites. Les très jeunes individus paraissent moins susceptibles de variations. Près de l'extrémité antérieure se trouve un corpuscule arrondi, le noyau. La cuticule recouvre

un protoplasme spongieux, dans lequel se voient des granulations, ressemblant à des bols alimentaires, puisque je n'ai pas pu arriver à distinguer une bouche. Cet être s'enkyste. Dans le même hôte se trouve une petite amibe.

» Le vagin de la vache contient un *Trichomonas;* il en est de même de l'intestin du porc. J'en ai trouvé aussi dans la bouche d'un homme assez mal portant. Les Bactérioïdomonas ont un flagellum aux deux bouts. L'intestin de la *Periplaneta Americana*, outre les Nyctothères, contient un Infusoire cilié nouveau assez remarquable; il s'y trouve aussi un petit Flagellé costulé rappelant le *Polymastix* du Hanneton. »

PHYSIOLOGIE COMPARÉE. — *Sur une nouvelle pièce, le* coussinet, *organe annexe de l'aiguillon, chez les Hyménoptères*. Note de M. **G. Carlet**, transmise par M. de Lacaze-Duthiers.

« Dans une Note précédente ([1]), nous avons désigné sous le nom d'*écaille trouée* une pièce mobile qui est percée d'un gros stigmate et qui rattache aux téguments l'appareil vulnérant des Hyménoptères. Or, on a peine à comprendre comment l'appareil trachéen si délicat, que nous avons décrit en dedans de l'écaille trouée, n'est pas empêché de fonctionner par les frottements continuels de cette écaille, soit contre les téguments, soit contre l'écaille anale, au moment du jeu de l'aiguillon ou même seulement pendant les mouvements de la respiration.

» L'appareil vulnérant est une sorte de piston conique, qui se meut dans un corps de pompe constitué par les écailles trouées; celles-ci, à leur tour, se meuvent dans le cône formé par le dernier anneau de l'abdomen. Il en résulte que la trachée, qui part du stigmate de l'écaille trouée, ne peut pénétrer directement dans le corps : elle est obligée de se couder pour ramper entre l'écaille anale et l'écaille trouée, avant d'entrer dans la cavité abdominale. On comprend aussi que le stigmate ne présente pas l'appareil valvulaire habituel aux stigmates de cette importance : effectivement, des valves situées en dehors du stigmate seraient appliquées contre la face interne du tégument et ne pourraient pas plus se mouvoir que les paupières sous un bandeau qui comprimerait fortement le globe oculaire;

([1]) *Comptes rendus*, 5 novembre 1888.

ou bien, si elles pouvaient se mouvoir, leurs mouvements seraient continuellement contrariés par les frottements contre la paroi.

» Cependant une fermeture du système trachéen de l'écaille trouée est nécessaire pour empêcher la sortie de l'air qui remplit les énormes vésicules trachéennes de l'abdomen; car celles-ci sont en rapport avec le stigmate toujours béant de l'écaille trouée. Or nous avons montré que cette fermeture existe : c'est celle que nous avons décrite, avec détail, sous le nom de *fermeture operculaire*.

» Mais on pourrait encore se demander comment l'opercule peut se soulever ou s'abaisser, interposé qu'il est entre l'écaille anale et l'écaille trouée, qui sont appliquées l'une contre l'autre.

» Nous ferons d'abord remarquer que l'opercule est oblique par rapport aux plans des écailles entre lesquelles il est emprisonné, ce qui tend à faciliter ses mouvements, sans nécessiter un trop grand écartement de ces deux écailles. Mais cet écartement est nécessaire, et c'est pour le produire qu'intervient un nouvel organe qui ne paraît pas avoir encore attiré l'attention. Cet organe, que nous appellerons *coussinet*, à cause de ses usages, a la forme d'un corps plano-convexe, fixé par sa face plane contre l'écaille anale, tandis que sa convexité répond à la portion de l'écaille trouée que n'occupe pas l'appareil trachéen. Il en résulte que cet appareil est constamment tenu à distance de l'écaille anale par le coussinet. L'opercule ne se trouve donc en contact avec aucune autre pièce de l'appareil vulnérant; il peut ainsi se soulever ou s'abaisser librement, par la contraction ou le relâchement du muscle trachéen.

» A un fort grossissement, le coussinet se montre composé de cellules sphéroïdales, à protoplasma granuleux, soudées les unes aux autres par une substance chitineuse fine et transparente qui rattache l'amas qu'elles forment à l'écaille anale.

» En résumé, il existe, chez les Hyménoptères, un organe (le *coussinet*) autour duquel pivote, pour ainsi dire, l'appareil vulnérant. Le coussinet s'oppose aux adhérences de cet appareil avec les téguments et facilite ses mouvements; mais il sert surtout à retenir dans les sacs trachéens la provision d'air nécessaire à leur gonflement, en permettant le jeu de l'opercule qui est ainsi une véritable soupape de sûreté de l'abdomen. »

ANTHROPOLOGIE. — *De la mensuration des os longs des membres, et de ses applications anthropologique et médico-légale.* Note de M. **Etienne Rollet**, présentée par M. Ranvier.

« Nous avons mesuré, avec la planche ostéométrique de Broca, les os longs des membres de 100 cadavres (50 hommes et 50 femmes) dont nous avons noté la taille et l'âge. C'étaient des adultes et des vieillards décédés dans les hôpitaux de Lyon. Voici les résultats de cette étude, faite au *laboratoire de Médecine légale*, résultats qui intéressent l'anthropologiste et le médecin légiste.

» I. *Inégalités physiologiques de longueur des os longs des membres.* — Au point de vue de la longueur, les os longs des membres présentent, de chaque côté du squelette, une asymétrie notable.

» L'humérus est 93 fois sur 100 plus long du côté droit que du côté gauche. Nous avons observé deux cas d'égalité chez l'homme et autant chez la femme. Une fois chez l'homme et deux fois chez la femme, la prédominance était en faveur du côté gauche. L'humérus droit est plus long, en moyenne, de 5^{mm}; il existe de nombreux cas où la différence est de 7^{mm} à 9^{mm}, des cas où elle est de 12^{mm} à 18^{mm}.

» Le radius et le cubitus présentent à peu près la même prédominance en faveur du côté droit. Elle est en moyenne de 3^{mm}; elle a été dans un cas de 10^{mm} (cubitus).

Le membre supérieur droit (humérus + radius) l'emporte sur le gauche 99 fois sur 100; la différence est en moyenne de 7^{mm} à 8^{mm}; elle atteint quelquefois 12^{mm}, 14^{mm}, 22^{mm}.

» Aux membres inférieurs, l'asymétrie est moins marquée. Pour les fémurs, l'inégalité est en moyenne de 3^{mm}, tantôt en faveur du côté droit, tantôt du gauche. Elle peut atteindre 7^{mm}, quelquefois 10^{mm}. L'égalité absolue est rare.

» Pour le tibia et le péroné, il y a souvent égalité, mais en général inégalité de 2^{mm} en faveur du côté droit, plus rarement en faveur du côté gauche. Le péroné est l'os qui présente la plus grande symétrie.

» Quant au membre inférieur, pris en totalité (fémur et tibia), l'égalité absolue est l'exception; il y a inégalité soit en faveur du côté droit, soit en faveur du côté gauche; elle est de 3^{mm} à 4^{mm} en moyenne, elle peut atteindre 15^{mm}.

» Quand le fémur est plus long d'un côté, il en est de même le plus souvent du tibia et du péroné du même côté; mais parfois le contraire a lieu, le fémur peut être plus long d'un côté et le tibia et le péroné plus courts. Le plus souvent le membre inférieur gauche et le membre supérieur droit prédominent. Dans un cas exceptionnel, probablement chez un gaucher, le membre supérieur gauche l'emportait de 16^{mm} sur le droit et le membre inférieur droit était le plus long.

» Ces inégalités, alternes ou non, des os homologues sont donc très fréquentes; elles ne le sont pas moins chez le vieillard que chez l'adulte, chez la femme que chez l'homme.

» II. *Des proportions des membres.* — Nos mensurations, réunies en Tableaux et soumises à des calculs très simples, nous ont fourni d'autres résultats non moins importants.

» Nous avons obtenu comme moyennes des tailles et de la longueur des os :

	Taille moy.	Fémur.	Tibia.	Péroné.	Humérus.	Radius.	Cubitus.
	m	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Hommes.....	1,66	453	366	362	328	242	259
Femmes.....	1,54	415	334	330	295	215	231

ce qui nous a donné comme rapports entre la longueur moyenne de l'os et la taille moyenne :

Stature = 100.

	Fémur.	Tibia.	Péroné.	Humérus.	Radius.	Cubitus.
Hommes.........	27,3	22,0	21,8	19,7	14,6	15,6
Femmes.........	26,9	21,6	21,4	19,1	13,9	15,0

» La différence entre l'homme et la femme est très notable et mérite d'être remarquée.

» Si, au lieu de chercher les rapports de la taille moyenne avec la longueur moyenne des os, nous cherchons ceux des tailles extrêmes, nous obtenons :

		Moyenne.	Fémur.	Tibia.	Péroné.	Humérus.	Radius.	Cubitus.
		m						
H.	Grandes tailles...	1,74	27,2	21,8	21,6	19,6	14,4	15,4
	Petites tailles....	1,56	27,3	22,0	21,7	19,7	14,7	15,5
F.	Grandes tailles...	1,65	26,75	21,7	21,4	19,2	13,8	14,9
	Petites tailles....	1,44	26,73	21,5	21,2	19,3	14,2	15,2

» Ainsi, chez l'homme, dans les petites tailles les membres sont proportionnellement plus longs que dans les grandes tailles, et chez la femme le membre inférieur est plus court, mais le membre supérieur est plus long. Les différences proportionnelles sont moindres chez la femme que chez l'homme.

» Dans la race noire, on admet comme rapports :

	Fémur.	Tibia.	Humérus.	Radius.
Nègres............	27,9	23,1	19,8	15,7
Négresses..........	27,9	23,1	19,8	15,5

» On voit combien cette race, comparée à la nôtre, a les membres supérieur et inférieur plus longs, surtout par le développement du tibia et du radius. La différence est très marquée chez la femme.

» On peut exprimer ces faits par des indices, et nous obtenons :

	Indice antibrachial.	Indice tibio-fémoral.
Hommes	74,4	81,2
Femmes	72,1	80,4

» On admet comme indices :

Nègres	79,0	82,9
Négresses	78,3	84,4

» Les indices des noirs sont manifestement plus élevés.

» III. *Détermination de la taille d'un sujet d'après un ou plusieurs os longs.* — Un os long étant donné, peut-on déterminer la taille de l'individu auquel il a appartenu? C'est un problème souvent posé en médecine légale et que nos recherches permettent de résoudre très simplement.

» En prenant comme point de départ la taille moyenne chez l'homme et chez la femme, nous nous sommes assuré que, lorsque la taille s'élève, la longueur des os augmente progressivement, et que lorsqu'elle s'abaisse la longueur des os diminue. Nous avons établi cette relation pour tous les os. Ainsi chez l'homme, lorsque la taille s'élève de 10^{mm}, le fémur augmente de $2^{mm},375$; lorsqu'elle s'abaisse, il diminue de $2^{mm},7$.

» Ces constatations faites à l'égard de chaque os, nous avons pu dresser un Tableau synoptique pour chaque sexe, à l'aide duquel, un os étant donné, il suffit de le mesurer et de chercher dans la colonne des tailles celle qui répond aux chiffres trouvés.

» Nous avons établi deux autres Tableaux où les tailles sont réparties en quatre groupes; à chaque taille moyenne répondent des os moyens.

» On peut également déterminer la taille avec les moyennes des os ou avec les rapports moyens que nous avons indiqués; mais voici un procédé plus rapide : il suffit de multiplier la longueur d'un os donné par les nombres suivants :

	Fémur.	Tibia.	Péroné.	Humérus.	Radius.	Cubitus.
Hommes	3,66	4,53	4,58	5,06	6,86	6,41
Femmes	3,71	4,61	4,66	5,22	7,16	6,66

» Ces nombres expriment le rapport de la taille moyenne à l'os moyen.

» A l'aide de toutes ces méthodes, on obtient des résultats très satisfaisants dans le plus grand nombre des cas, surtout si l'on a à sa disposition un fémur et un humérus de préférence aux autres os. Nous avons pu nous en assurer par de nombreux exemples. »

GÉOLOGIE. — *Sur les dépôts phosphatés de Montay et de Forest (Nord).* Note de M. **J. Ladrière**, présentée par M. Hébert.

« Il existe à Montay et à Forest, près du Cateau-Cambrésis, deux dépôts phosphatés exploitables : une sorte de conglomérat crayeux, connu dans le pays sous le nom de *marnes*, et des sables glauconieux qui les recouvrent. Ces sables titrent de 15 à 17 pour 100 d'acide phosphorique; ils forment une couche dont l'épaisseur connue jusqu'ici varie entre $0^m,30$ et $1^m,80$; la marne est moins riche en phosphate.

» Ces deux communes sont arrosées par la Selle et l'un de ses affluents, le ruisseau de Basuel. Sur la rive droite de ces deux cours d'eau, la craie à silex et à *Micraster breviporus* constitue des escarpements d'une quinzaine de mètres de hauteur; au-dessus, on rencontre quelques bancs de craie grisâtre, glauconifère, qui contient environ 4,5 pour 100 d'acide phosphorique. Par suite des dénudations prétertiaires, la craie grise n'existe plus qu'à l'état de lambeaux isolés, présentant de nombreuses poches qui pénètrent souvent jusque dans la craie à silex.

» De la désagrégation de ces roches, il résulte une sorte de conglomérat crayeux, composé d'une masse pulvérulente de craie grise, empâtant des fragments de craie de même nature, quelques silex très corrodés, des débris d'inocérames, etc. Ce conglomérat, que l'on rencontre un peu partout à la surface de la craie, mais surtout dans les poches, a été soumis à des lévigations successives et a laissé comme résidu du sable phosphaté glauconifère.

» Naturellement, c'est dans les poches que le sable phosphaté atteint sa plus grande épaisseur, mais il ne les emplit jamais complètement; il forme néanmoins, le long de leurs parois et jusque sur leurs bords supérieurs, une couche qui, sans être absolument continue et régulière, s'étend souvent sur de très grands espaces.

» Les sables phosphatés sont recouverts par de l'argile brune, peu épaisse, mais très plastique et imperméable. Au-dessus, se trouve le con-

glomérat à silex et même parfois des amas de sables landéniens. Ce sont ces divers dépôts qui nous ont conservé intacts les sables phosphatés.

» Dans les poches, les diverses couches tertiaires s'infléchissent, sans changer d'épaisseur, et prennent absolument la même allure que les sables phosphatés sous-jacents : il y a donc eu, comme l'a si bien démontré M. Gosselet, approfondissement lent et continu de ces cavités, postérieurement à la formation des dépôts qu'elles renferment. »

GÉOLOGIE. — *Les dislocations du terrain primitif dans le nord du Plateau central.* Note de M. **L. de Launay**, présentée par M. Fouqué.

« L'origine lacustre et indépendante des divers bassins houillers du Plateau central est aujourd'hui généralement admise. Nous avons cherché à aller plus loin et à étudier les causes qui ont préludé à la formation des lacs antéhouillers eux-mêmes, qui leur ont donné telle ou telle position, tel ou tel alignement.

» Cette étude a été surtout fondée sur l'examen nouveau, croyons-nous, du détail des plissements des gneiss et micaschistes dans toute leur minutie. Ayant avec le plus grand soin, dans une région assez étendue, relevé toutes les directions des feuillets du terrain primitif et le sens de leur plongement, nous avons reporté ces éléments sur une Carte et, en les réunissant par des courbes continues, nous avons obtenu des résultats beaucoup moins compliqués qu'une première observation superficielle ne pourrait le faire croire.

» L'examen de ces courbes nous a conduit à résumer les dislocations successives de la région nord du Plateau central de la manière suivante :

» L'écorce terrestre, par suite de la solidification progressive du globe, tend sans cesse à se contracter pour continuer à s'appliquer sur le noyau liquide, et le mouvement de rotation autour d'un axe fait que cette contraction se produit grossièrement suivant des zones comprises entre deux parallèles.

» Pour chacune de ces zones tout se passe donc comme si elle subissait constamment un refoulement violent vers le centre; il est assez facile de concevoir *a priori* et l'on constate en effet que cette action a eu pour résultat de produire une série de plissements et de cassures en dents de scie déterminant des voussoirs triangulaires contigus et opposés, dont le jeu

relatif et le fractionnement de plus en plus grand par des étoilements partant de chaque sommet ont produit la plupart des mouvements des terrains dans la région étudiée.

» L'histoire de ces mouvements, dont nous donnons ailleurs le détail ([1]), comprend un certain nombre de grandes phases successives, à chacune desquelles correspond, par suite des actions dynamiques elles-mêmes, l'arrivée au jour d'une roche acide que caractérise l'état de sa silice en excès et d'un métal différent venu à la fin de l'éruption avec le résidu de cette silice.

» La première phase concorde avec la venue du granite; nous la considérons jusqu'à nouvel ordre comme d'âge indéterminé, tout au moins postcambrien; elle paraît avoir été suivie d'une autre dislocation ayant livré passage à la granulite et terminée par la formation des filons d'étain de Vaulry, Montebras (Creuse), les Colettes (Allier).

» Entre les tufs porphyritiques du culm et le houiller supérieur, sans doute très peu avant le houiller supérieur, un plissement considérable donne leur allure aux cuvettes houillères du nord du plateau central et ouvre un passage aux microgranulites. C'est, dans la Creuse, l'âge de l'antimoine de Villerange.

» Entre le permien et le trias, un nouveau jeu se produit, qui, ailleurs, est accompagné de mélaphyres et de pyromérides. Ici il est seulement signalé par une compression latérale des cuvettes houillères et par des filons de quartz avec galène.

» Enfin, à l'époque tertiaire, le mouvement, localisé de plus en plus, se concentre dans un triangle sur lequel M. Michel Lévy a appelé notre attention, triangle compris entre les failles de Saint-Éloi et du Forez et dont la base paraît s'élever progressivement par rapport au sommet. Il se termine par une dislocation importante à l'époque de la mer des faluns, ouvrant une route aux roches pliocènes.

» En résumé, les dislocations successives se sont constamment reproduites dans le même sens, et chacune de leurs phases nouvelles n'a été que l'accentuation de la précédente. Dans l'ensemble, leur effet, pour la région considérée, est de relier, par un grand plissement en V, les direc-

---

([1]) *Bulletin de la Société de Géologie, Compte rendu de la réunion extraordinaire de la Société à Commentry*; 1888.

tions N.-E. à S.-E. des plis de Bretagne à celles de N.-E. à S.-O. du Morvan.

» Si nous nous restreignons à la dislocation qui a précédé le houiller supérieur, sa loi peut être énoncée très simplement. Le terrain primitif, c'est-à-dire les gneiss et au-dessus d'eux les micaschistes, a formé alors dans la partie comprise entre le Cher et l'Allier, au nord du bassin de Commentry, une série de plis N.-E. à S.-O. se rattachant à ceux du Morvan. Dans chaque *voûte anticlinale* s'est trouvé localisé le granite ; dans chaque dépression synclinale s'est déposé le houiller.

» Le premier de ces synclinaux comprend les bassins de Villefranche, Montvicq et Bézenet, Commentry, séparés lors de ce mouvement même par des refoulements locaux de granite dans le synclinal ayant constitué des barrages.

» Le second comprend les bassins de Montmarault, Fins et Noyant, Souvigny, Decize. Au sud, il a été prolongé à la même époque par une cassure rectiligne distincte des plissements dans laquelle se sont déposés les terrains houillers de Saint-Éloy, Pontaumur et Champagnac, et accompagné par d'autres fractures formant le V avec cette dernière, dont l'une a donné naissance au houiller d'Ahun.

» Entre chacun de ces synclinaux, le granite forme des voûtes anticlinales recouvertes par un manteau de gneiss surmonté de micaschiste et incliné en sens contraire de part et d'autre.

» Comme application pratique, il y a lieu de croire qu'entre Decize et Souvigny, dans la partie comprise entre la Loire et l'Allier, à l'est de l'îlot gneissique de Neuville et un peu à l'ouest de la ligne joignant Moulins à Decize, le terrain houiller doit exister sous le tertiaire ; mais il a été probablement rejeté à une grande profondeur par des failles transversales qu'on constate à Decize et sur les bords est et ouest du bassin de la Limagne. »

A 3 heures trois quarts, l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section de Chimie, par l'organe de M. *Fremy*, en l'absence de son Doyen, M. *Chevreul*, présente la liste suivante de candidats à la place devenue vacante par le décès de M. *H. Debray* :

En première ligne. . . . . M. **Schützenberger.**

En seconde ligne, ex æquo *et par ordre alphabétique*. . . . .
- M. **Arnaud.**
- M. **Ditte.**
- M. **Etard.**
- M. **Arm. Gautier.**
- M. **Grimaux.**
- M. **Jungfleisch.**
- M. **Le Bel.**
- M. **Maquenne.**
- M. **Moissan.**

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 5 heures. J. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 3 décembre 1888.

Traité de Mécanique céleste; par F. Tisserand. Tome I : *Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires*. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1889; 1 vol. in-4°.

Études d'Optique géométrique. Dioptres, systèmes centrés, lentilles, instruments d'Optique; par C.-M. Gariel. Paris, Nony et Cie, 1889; 1 vol. gr. in-8°. (Présenté par M. Cornu.)

Traité de Télégraphie sous-marine; par E. WUNSCHENDORFF. Paris, Baudry et Cie, 1888; 1 vol. in-4°. (Présenté par M. Cornu.)

Cyclones et trombes; par le Prof. JEAN LUVINI. Turin, Paravia e C^a^, 1888; br. in-8°. (Présenté par M. Faye.)

HENRI DE PARVILLE. *Causeries scientifiques. Découvertes et inventions. Progrès de la Science et de l'Industrie;* vingt-septième année, 1887. Paris, J. Rothschild, 1888; 1 vol. in-12.

Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par J. BOSSCHA. Harlem, les héritiers Loosjes, 1888; br. in-8°.

Du traitement du choléra asiatique par le bichlorure de mercure; par le Dr T. BLANCHON. Alexandrie, Rey et Cie, 1866; br. in-8°. (Renvoi au concours Bréant de l'année 1889.)

D'un nouveau mode de traitement curatif et prophylactique du choléra asiatique; par M. le Dr A. YVERT (extrait de la *Gazette hebdomadaire de Médecine et Chirurgie*); br. in-8°. (Renvoi au concours Bréant de l'année 1889.)

Du paludisme, de sa nature parasitaire et de ses microbes. — Des hématozoaires du paludisme, etc. — Traité des fièvres palustres; par A. LAVERAN. Paris, Doin; 3 br. et 1 vol. in-8°. [Renvoi au concours Montyon (Médecine et Chirurgie) de l'année 1889.]

Hygiène de la première enfance; par le Dr JULES ROUVIER. Paris, Doin, 1889; 1 vol. gr. in-8°. (Présenté par M. le baron Larrey.)

Études sur l'hystérie infantile; par ARTHUR CLOPATT. Helsingfors, Frenckell et Fils, 1888; br. in-4°.

Folkskoleidéns utveckling i Finland från nittonde århundradets början till af GUSTAF F. LONNBECK. Helsingfors, 1887; br. in-4°.

Official Copy. Contributions to our knowledge of the meteorology of the artic regions, published by the authority of the meteorological Council; Part V. London, 1888; 1 vol. in-4°.

Official Copy. Hourly readings, 1885. Part IV, october to december. London, 1888; 1 vol. in-4°.

Official Copy. Meteorological observations at stations of the second order for the year 1884. London, 1888; 1 vol. in-4°.

The american Ephemeris and Nautical Almanac for the year 1891. Washington, Bureau of Navigation, 1888; 1 vol. in-4°.

The nautical Almanac and astronomical Ephemeris for the year 1892, *for the meridian of the royal Observatory at Greenwich,* published by order of the

Lords commissioners of the Admiralty. London, Darling and Son; 1 vol. gr. in-8°.

Ouvrages reçus dans la séance du 10 décembre 1888.

Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal; par Gaston Darboux. Deuxième Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces.* Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1889; 1 vol. gr. in-8°.

Connaissance des Temps. Extrait à l'usage des Écoles d'Hydrographie et des marins du commerce, pour l'an 1890, publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888; br. gr. in-8°. (Présenté par M. Faye.)

Du déterminant quadrilatère; par A. Boucher. Angers, Germain et Grassin, 1888; br. in-4°.

Album de Statistique graphique de 1887. (Publié par le Ministère des Travaux publics.) Paris, Imprimerie nationale, 1888; 1 vol. gr. in-4°. (Présenté par M. Lalanne.)

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1886 *à mai* 1887. Note de M. Rayet. Bordeaux, G. Gounouilhou, 1887; br. gr. in-8°.

Tremblements de terre et éruptions volcaniques au Centre-Amérique depuis la conquête espagnole jusqu'à nos jours; par F. de Montessus de Balloñe. Dijon, Eugène Jobard, 1888; 1 vol. in-4°.

Statistique médicale de l'armée pendant l'année 1885. (Publiée par le Ministère de la Guerre.) Paris, Imprimerie nationale, 1888; 1 vol. in-4°. (Deux exemplaires.)

Études sur la flore fossile du calcaire grossier parisien; par M. Ed. Bureau. 1888; br. in-4°. (Présenté par M. Van Tieghem.)

Revision des Nostocacées hétérocystées contenues dans les principaux herbiers de France; par MM. Ed. Bornet et Ch. Flahault. (Extrait des *Annales des Sciences naturelles,* VII[e] série, *Botanique,* tomes III, IV, V et VII.) Paris, 1886-88; 1 vol. gr. in-8°.

E. Bornet et Ch. Flahault. *Concordance des* Algen Sachsens *et* Europa's *de* L. Rabenhorst *avec la revision des Nostocacées hétérocystées de MM. Bornet et Flahault.* Venezia, M. Fontana, 1888; br. in-8°.